数理解析研究所講究録
301巻 1977年 57-62

Fibonacci 数に関する数値実験とその裏付け

岡山大 理　　頼永 正孝

(U_n) を Fibonacci 数列, 即ち

$$\begin{cases} U_0 = 0, \quad U_1 = 1, \\ U_n = U_{n-1} + U_{n-2} \quad (n = 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

で定義される数列とし, $\left(\frac{n}{5}\right)$ を Legendre の記号, 即ち

$$\left(\frac{n}{5}\right) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n \equiv 1, 4 \pmod 5 \\ -1 & \text{if} \quad n \equiv 2, 3 \pmod 5 \end{cases}$$

とする. このとき, つぎの命題は初等整数論においてよく知られている事実である(cf. [2]).

命題. もし n が 5 以上の素数ならば,

$$U_n \equiv \left(\frac{n}{5}\right) \pmod n \quad \text{が成り立つ.}$$

最近, 内山教授はこの命題の逆が成り立つかどうかについて数値実験を行うことを筆者に提案した(註. 問題そのものは佐藤大八郎教授に負う). 即ち, 我々の問題はつぎの通りである.

<u>問題</u>　もし，整数 $n\ (\neq 5)$ がつぎの条件

$$(C):\quad U_n \equiv \left(\frac{n}{5}\right) \pmod{n}$$

を満たすならば，n はつねに素数か？

まず，予備実験を行った．U_n の値の計算は直接定義式を用いて行い，$n \leq 3000$ について調べたが，問題の条件 (C) を満たような合成数は得られなかった．

U_n の値を定義式に従って計算することは，n が大きくなるに従って，1ステップに要する時間が急速に増大し，あまり得策でない．

そこで U_n の計算法について検討を行い一つの方法を得た．我々の計算の基礎となったのは，つぎの関係式である．

$$(1)\quad \begin{cases} U_{2n-1} = U_{n-1}^2 + U_n^2 \\ U_{2n} = (2U_{n-1} + U_n)\,U_n \\ U_{2n+1} = (U_{n-1} + U_n)^2 + U_n^2 \end{cases}$$

実際の手順は，N の2進展開を $N = a_0 a_1 a_2 \cdots a_t\ (a_0 = 1)$ とするとき，数列 (s_i) をつぎの式で定義する．

$$\begin{cases} s_0 = a_0 = 1 \\ s_i = 2s_{i-1} + a_i \quad (i = 1, 2, \cdots, t). \end{cases}$$

このとき，明らかに，$N = s_t$ である．

今，U_n を modulo N で計算したものを $U(n)$ と書くことにすれば，$U(0) = 0$，$U(1) = 1$ より出発して，つぎ

のような繰り返し計算を行う．一般に，$U(S_{i-1}-1)$, $U(S_{i-1})$ が分ったとき，もし，$a_i=0$ ならば，基本関係式（1）の上側の2つの式を用いて $U(S_i-1)$, $U(S_i)$ を modulo N で計算する．また，$a_i=1$ のときは，基本関係式（1）の下側の2つの式を用いて $U(S_i-1)$, $U(S_i)$ を modulo N で計算する．このようにして，$t+1$ 回の繰り返しにより，$U(S_t)\equiv U_N \pmod N$ を得る．

公式の適用に際して，modulo N での2数の乗算はつぎのような手続きをサブルーチンとして用意して行った．

今，A，Bを2つの整数とし，Bの2進展開を $B=b_0b_1\cdots b_t$ $(b_0=1)$ とするとき，

$$\begin{cases} C_0\equiv b_0A \\ C_i\equiv 2C_{i-1}+b_iA \quad (i=1,2,\cdots,t) \end{cases} \pmod N$$

の繰り返し計算を行えば，積 $C_t\equiv AB \pmod N$ を得る．

このようにして，まず，U_N の値を計算し，条件（C）を確める．もし，条件（C）を満たすならば，さらに，整数 N の素数性についてテストを行った．こうして，$N\leqq 70700$ までの N について調べた．計算機は岡山大学数学教室の HITAC 10 を用い，プログラムはアセンブラ言語で書いた．

そして，104個の条件(C)を満たすような合成数を得た．それらの最初のものはつぎの表の通りである．

List of Composite Converse Numbers

4181	5474	5777	6479	6721	10877	12958
13201	15251	17302	27071	34561	40948	41998
44099	47519	51841	54839	64079	64681	65471
67861	68251	72831	75077	78089	88198	90061

つぎに，条件(C)を満たすような整数を converse number と名付け（以下 CN と略す），CN の性格について考察を行った．そして，つぎのような一つの結論を得た．

定理．Fibonacci 数 U_n $(n>5)$ の proper part の任意の約数は converse number である．

ここで，素数 p に対して，U_n は p で割り切れるが，n よりも小さいどんな正整数 m に対しても U_m は p で割り切れないとき，p を U_n の原始因数 (primitive factor) といい，U_n の原始因数でない素な因数を初等因数 (elementary factor) という．U_n の proper part とは U_n の中から初等因数を取り除いた整数である．

この定理の証明の基礎となったのは，つぎの関係式である．

N を奇数とするとき，

$$(2)\qquad \begin{cases} U_N-(-1)^{(N-1)/2}=U_{(N-1)/2}\,V_{(N+1)/2} \\ U_N-(-1)^{(N+1)/2}=U_{(N+1)/2}\,V_{(N-1)/2} \end{cases}$$

ここで，V_N は $V_N=U_{2N}/U_N$ で定義される整数であって，Lucas数と呼ばれるものである。

今，N をある U_n の proper part とするとき，n を3つの場合，即ち，奇数，$4k$ の形の数，$4k+2$ の形の数，に分けて，それぞれの場合について，N と n と $\left(\frac{n}{5}\right)$ との間の関係を調べ，N の形を決定し，関係式 (2) を用いて定理の主張が確められる。

我々の得た最小の合成数である cN：4181 は丁度 U_{19} の proper part になっている。この定理から，いくらでも大きな合成数の cN を示すことができる。例へば，

$N=192900153617=2269\cdot4373\cdot19441$ は U_{31} の proper part であるから，$N_1=2269\cdot4373$，$N_2=2269\cdot19441$，$N_3=4373\cdot19441$ および N 自身はいづれも合成数の cN である。

さらに，つぎの公式が知られている（cf. [3]）。

n を奇数とするとき，

$$V_{5n}=V_n\,(V_{2n}-5U_n+3)(V_{2n}+5U_n+3).$$

今，n を5よりも大きい素数にとると，容易に分るように2つの因数 $V_{2n}-5U_n+3$ と $V_{2n}+5U_n+3$ は必ず原始

因数を含むから，$U_{10n} = U_{5n} V_{5n}$ の proper part は合成数である。従って，上の定理から，合成数の CN は無限に多く存在することが結論される．

参 考 文 献

[1] L. E. Dickson : History of the Theory of Numbers, Vol. I. 1952.

[2] G. H. Hardy and E. M. Wright : An Introduction to the Theory of Numbers, 3rd ed. 1954.

[3] M. Kraitchik : Introduction a la Théorie des Nombres, 1952.

[4] N. N. Vorob'ev : Fibonacci Numbers (English translation), 1961.

[5] M. Yorinaga : On a Congruencial Property of Fibonacci Numbers, Math. J. Okayama Univ. 19, 1976, 5-17.